...μεν 6/11/17

$U \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f: U \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{x}=(x_1,\dots,x_n) \to f(\bar{x}) = f(x_1,\dots,x_n)$

α) $(n=2 \quad (x,y) \to f(x,y)$

$n=3 \quad (x,y,z) \to f(x,y,z) \in \mathbb{R}$

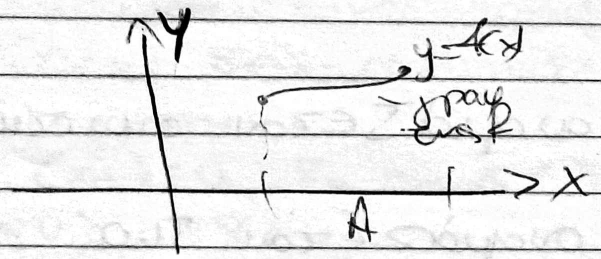
β) $f: U\to \mathbb{R}^m$, $\bar x = (x_1,\dots,x_n) \to f(\bar x)\in\mathbb{R}^m = \begin{pmatrix} f_1(x)\\ \vdots \\ f_m(x)\end{pmatrix}$

όπου $f_i: U\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$

Καμπύλες $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$

$t \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}$

Αντιδιαστολή με f $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



Είπαμε π.ο, π. τιμών, εικόνα, γράφημα.

Ορισμός: Έχουμε $\bar f, \bar g: U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$

Τότε ορίζονται (κατά σημείο)

α) το άθροισμα $\bar f+\bar g: U\to\mathbb{R}^m$

$(\bar f+\bar g)(\bar x) := \bar f(x)+\bar g(x)$

β) το βαθμωτό γινόμενο

$(a\bar f)(\bar x) = a\bar f(x) \quad (a\in\mathbb{R})$

γ) η σύνθεση της $\bar f$ με μία $\bar h: V\to\mathbb{R}^k$ όταν $\bar f(U)\subset V$

$\bar{h} \circ \bar{f} : U \to \mathbb{R}^k, \quad (\bar{h} \circ \bar{f})(\bar{x}) := \bar{h}(\bar{f}(\bar{x}))$

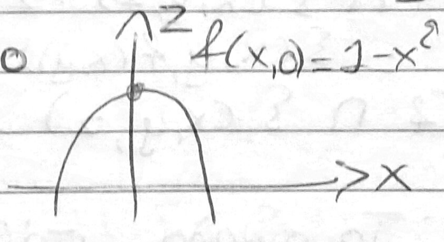
Αν οι συναρτήσεις είναι πραγματικές τότε ορίζεται και το γινόμενο $(fg)(\bar{x}) := f(\bar{x})g(\bar{x})$ και το πηλίκο $\left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ (όπου $g(\bar{x}) \neq 0$)

Πραγματικές συναρτήσεις

Παράδειγμα: για $n=2$

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$= 1 - (x^2 + y^2)$$
$$= 1 - \|(x,y)\|^2$$

$y = 0$



Ορισμός: Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ και $c \in \mathbb{R}$.
Το υποσύνολο του πεδίου ορισμού U, που περιέχει όλα τα $\bar{x} \in U$ για τα οποία η f έχει την τιμή c.

$L_f(c) = \{\bar{x} \in U : f(\bar{x}) = c\}$ $(= f^{-1}(\{c\}))$

ονομάζεται σύνολο στάθμης c της f

όπου για $f : U \to \mathbb{R}$ και $A \subset \mathbb{R}$

$f^{-1}(A) = \{\bar{x} \in U : f(\bar{x}) \in A\}$

(αντίστροφη εικόνα) ορ.

Π.χ για την $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ σύνολο

έχουμε για $c > 1$: $L_f(c) =$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{f(x,y)}_{=1-x^2-y^2} = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 - c\}$

$L_f(1) = \{(0,0)\}$

κύκλος

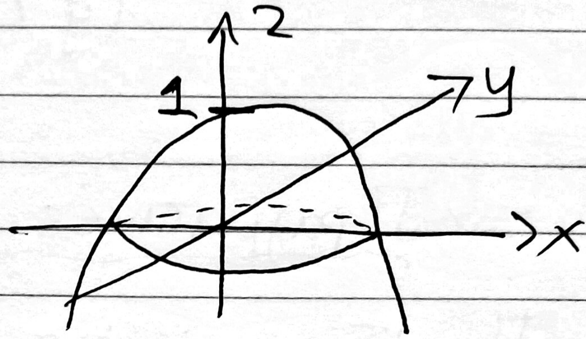
$c<1 \Rightarrow L_f(c) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \underbrace{1-c}_{>0 \text{ για } c<1}\}$

ακτίνας

$= (\sqrt{1-c})^2$

κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{1-c}$

$f(x,y) = 1-x^2-y^2$



$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \;(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$\Gamma_f \cap \{(x,y,z) : z=0\}$

$= \{(x,y,f(x,y)) : f(x,y)=0\}$

$\Rightarrow \Gamma_f \cap \{(x,y,z) : z=0\} = \{(x,y,0) : (x,y)\in L_f(0)\}$

Προσοχή: Το σύνολο στάθμης μιας $f: U \to \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^n$, βρίσκεται στο $U \subset \mathbb{R}^n$

Για $n \geq 2$ μπορούμε να πούμε ότι είναι οι συντεταγμένες $(x,y)\in U$ για τις οποίες $f(x,y)=c$

Για $n=2$ το $L_f(c) = \{(x,y)\in U : f(x,y)=c\}$ ονομάζεται καμπύλη στάθμης c επειδή συνήθως έχει τη μορφή καμπύλης

$L_f(c) \subset U \subset \mathbb{R}^2$

Για $n=2$ τα σύνολα $\{(x,y,c) : \underbrace{(x,y)\in L_f(c)}_{\Leftrightarrow f(x,y)=c}\}$ ονομάζονται ισοϋψείς καμπύλες και είναι $\subset \Gamma_f$

$D = \{(x,y,f(x,y)\} \quad f(x,y)=c\}$

Ορισμός Έστω $U \in \mathbb{R}^n$ και $f: U \to \mathbb{R}$

και $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημ. συσσ. (ακολ) του U

(δηλ. $\exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$)

$\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$

Τότε λέμε ότι στο σημείο $\bar{x}_0$ η f (ακολ) συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$

αν $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \ell$

αν η ακολ. συγκλίνει στο x_0

$[\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_\nu) \to \ell]$

Πρόταση: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0$ σημείο συσσώρευσης στο U τότε $\underbrace{f(\bar{x}) \to \ell \quad \text{για } \bar{x} \to x_0}$

(συμβολισμός για << στο $\bar{x}_0$ η f συγκλίνει στο ℓ)

(ορισμός $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{x_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_\nu) \to \ell$ $(\nu \to \infty)$)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$

Απόδειξη

$\boxed{\Leftarrow}$: (Εύκολο)

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$.

(Θ.ν.δ.ο $f(\bar{x}_\nu) \to \ell$)

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$

$|f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$. Από την άλλη $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0$:

$x_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \nu \geq \nu_0 : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon$

Άρα έδειξα ότι $f(\bar{x}_\nu) \to \ell$ την άλλη